

frazioni algebriche

Una frazione algebrica è una frazione che ha per numeratore e denominatore monomi e polinomi.
Sono frazioni algebriche:

$$\frac{2xy}{5z}; \quad \frac{a+b^2}{3m}; \quad \frac{axy}{x^2-4}$$

Sostituendo al posto delle singole lettere, dei valori numerici dati, le frazioni si trasformano in numeri relativi.

Una frazione algebrica ha senso solo per quei valori attribuiti alle lettere che non annullano il denominatore. Così la seguente frazione..

$$\frac{axy}{x^2-4}$$

perde significato per $x=2$ o per $x=-2$.

Per le frazioni algebriche valgono le stesse regole dette per le frazioni aritmetiche.

In particolare, la frazione non cambia se si moltiplicano o si dividono numeratore e denominatore per la stessa quantità o per una stessa espressione diversa da 0.

Semplificazioni di frazioni algebriche

Avviene dividendo i due termini della frazione per fattori comuni a numeratore e denominatore, la frazione viene così ridotta a minimi termini.

Se i termini della frazione sono polinomi, bisogna prima farne la scomposizione usando metodi già esposti in precedenza.

Se numeratore e denominatore hanno fattori comuni si dividono entrambi per tali fattori.

$$\frac{12a^3b^2}{9ab^2c} = \frac{3 \cdot 4a^3b^2}{3 \cdot 3ab^2c} = \frac{4a^2}{3c}$$

$$\frac{4a^3 - 4a^2}{8a^2b} = \frac{4a^2(a-1)}{4 \cdot 2a^2b} = \frac{a-1}{2b}$$

$$\frac{3a^3 - 3a^2b}{27a^3 - 27ab^2} = \frac{3a^2(a-b)}{27a(a^2 - b^2)} = \frac{3a^2(a-b)}{27a(a-b)(a+b)} = \frac{a}{9(a+b)}$$

Riduzione di più frazioni algebriche al minimo comun denominatore

Per ridurre più frazioni algebriche al m.c.d. si riducono le frazioni ai minimi termini, poi si trova il m.c.m. dei denominatori e questo sarà il denominatore comune.

Si divide il m.c.m. dei denominatori per ciascun denominatore e si moltiplica il quoziente per il rispettivo numeratore.

Ad esempio, ridurre al m.c.d. le seguenti frazioni

$$\frac{a+1}{2a^2-2ab} \quad ; \quad \frac{2a}{a^2-b^2} \quad ; \quad \frac{3a+b}{4ab+4b^2}$$

si scompongono i denominatori in prodotti di fattori, per trovare l'm.c.m.

$$2a^2 - 2ab = 2a(a-b)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$4ab + 4b^2 = 4b(a+b)$$

il loro minimo comune multiplo (m.c.m.) è

$$4ab \cdot (a+b) \cdot (a-b)$$

Questo si divide per il per il denominatore della prima frazione

$$\frac{4ab(a-b)(a+b)}{2a(a-b)} = 2b(a+b)$$

il quoziente si moltiplica per il numeratore della prima frazione

$$2b(a+b) \cdot (a+1)$$

La prima frazione diventa, dunque.

$$\frac{2b \cdot (a+b) \cdot (a+1)}{4ab \cdot (a+b) \cdot (a-b)}$$

dividiamo l'm.c.m. per il denominatore della seconda frazione e abbiamo:

$$\frac{4ab(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)} = 4ab$$

quindi per la seconda frazione...

$$\frac{2b \cdot 4ab}{4ab(a+b)(a-b)}$$

dividiamo l'm.c.m. per il denominatore della seconda frazione e abbiamo:

$$\frac{4ab(a-b)(a+b)}{4b(a+b)} = a(a-b)$$

abbiamo infine per la terza frazione

$$\frac{(3a+b)a(a-b)}{4ab(a+b)(a-b)}$$

Somma di frazioni algebriche

La somma algebrica di più frazioni aventi lo stesso denominatore è una frazione che ha il denominatore comune e per numeratore la somma algebrica dei numeratori.

$$\frac{a+b}{c} - \frac{2b}{c} + \frac{a-b}{c} = \frac{a+b-2b+a-b}{c} = \frac{(a+a)+(b-2b-b)}{c} = \frac{2a-2b}{c}$$

Per calcolare la somma algebrica di più frazioni, prima si riducono allo stesso denominatore e poi si forma una frazione avente per numeratore la somma dei numeratori delle frazioni così ridotte, e per denominatore il denominatore comune scelto per le frazioni date.

Ad esempio, eseguire la seguente somma:

$$\frac{6x-y}{x^2y} + \frac{x-12y}{2xy^2} - \frac{x^2+3y^2}{x^2y^2}$$

il denominatore comune è: $2x^2y^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{2y(6x-y) + x(x-12y) - 2(x^2+3y^2)}{2x^2y^2} = \\ &= \frac{12yx - 2y^2 + x^2 - 12xy - 2x^2 - 6y^2}{2x^2y^2} = \frac{-x^2 - 8y^2}{2x^2y^2} \end{aligned}$$

ecco un altro esempio:

$$\begin{aligned} &\frac{12x}{8x+4y} - \frac{3x+3y}{6x-3y} + \frac{8x^2+y^2}{4x^2-y^2} = \frac{12x}{4(2x+y)} - \frac{3(x+y)}{3(2x-y)} + \frac{8x^2+y^2}{(2x-y)(2x+y)} = \\ &= \frac{3x}{(2x+y)} - \frac{(x+y)}{(2x-y)} + \frac{8x^2+y^2}{(2x-y)(2x+y)} = \\ &= \frac{3x(2x-y) - (2x+y)(x+y) + (8x^2+y^2)}{(2x-y)(2x+y)} = \\ &= \frac{6x^2 - 3xy - (2x^2 + 2xy + xy + y^2) + 8x^2 + y^2}{(2x-y)(2x+y)} = \\ &= \frac{6x^2 - 3xy - 2x^2 - 2xy - xy - y^2 + 8x^2 + y^2}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{12x^2 - 6xy}{(2x-y)(2x+y)} = \\ &= \frac{6x(2x-y)}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{6x}{2x+y} \end{aligned}$$

Prodotto di frazioni algebriche

Il prodotto di due o più frazioni algebriche, è quella frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori dati.

più semplicemente se A, B, C e D sono dei polinomi:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Naturalmente prima di eseguire la moltiplicazione converrà eseguire tutte le semplificazioni possibili, così pure converrà, se possibile, semplificare la frazione prodotta.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 + ab}{x^3 + y^3} &= \frac{(x+y)^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a(a+b)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)} = \\ &= \frac{a(x+y)}{(a-b)(x^2 - xy + y^2)} \end{aligned}$$

Elevamento a potenza di frazioni algebriche

Per elevare a potenza, con esponente intero, una frazione algebrica, basta elevare a quella potenza entrambi i termini della frazione, cioè se A e B sono polinomi ed n un numero intero:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

ad esempio:

$$\left(\frac{2a^3b}{3c^2}\right)^3 = \frac{(2a^3b)^3}{(3c^2)^3} = \frac{8a^9b^3}{27c^6}$$

Divisione di frazioni algebriche

Siano dati quattro polinomi, A, B, C, D.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

infatti

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A/B}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\frac{C}{D}} \cdot \frac{D}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Per dividere una frazione algebrica per un'altra, che non sia nulla, basta moltiplicare la prima per la reciproca della seconda.

ad esempio:

$$\begin{aligned} \frac{4a^2 - b^2}{3ab^3} : \frac{2a^2 - ab}{4b^2} &= \frac{4a^2 - b^2}{3ab^3} \cdot \frac{4b^2}{2a^2 - ab} = \frac{(2a - b)(2a + b)}{3ab} \cdot \frac{4}{a(2a - b)} = \\ &= \frac{4(2a + b)}{3a^2b} \end{aligned}$$